LA LINEA ELASTICA

Una trave soggetta a momento flettente costante, si deforma secondo un arco di cerchio con raggio

$$r = \frac{E \cdot I}{M_f}$$

e quindi il relativo angolo di flessione è:

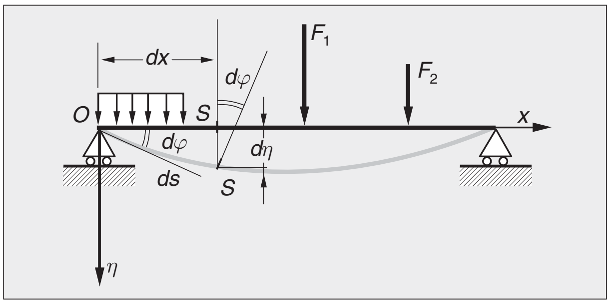
$$\varphi = \frac{M_f \cdot l}{E \cdot I}$$

Se il momento flettente non è costante, la trave si deforma come una curva in cui il valore di r precedente è il valore locale del raggio di curvatura. L'abbassamento f della struttura in seguito all'applicazione del carico è detto **freccia** d'inflessione; nelle travi a mensola il valore massimo è all'estremo libero, mentre nelle travi appoggiate è in posizione intermedia tra gli appoggi.

L'**equazione differenziale della linea elastica** lega le sollecitazioni esterne alla conformazione assunta dalla trave in seguito alla deformazione (**linea elastica**) (figura). Si ottiene:

$$\frac{d\eta}{dx} = \varphi \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M_f}{E \cdot I}$$

La seconda è l'equazione cercata.



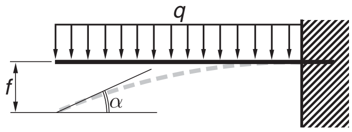
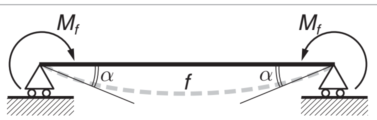
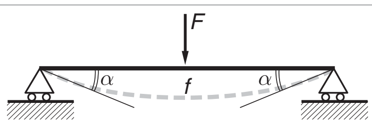
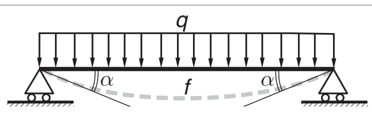
La tabella riporta le espressioni delle frecce e degli angoli di rotazione per alcune configurazioni tipiche.

I risultati per le **travi appoggiate** nelle condizioni di carico più semplici si ricavano considerando la trave come un complesso di due mensole alle quali si possono applicare le formule per le travi a mensola.

Per altri casi di carico si può utilizzare il principio di **sovrapposizione degli effetti**; per esempio per travi incastrate con carico concentrato in mezzeria o con carico uniformemente ripartito su metà della trave.

In tutti i casi lo **sforzo di taglio** ha un'influenza molto bassa rispetto all'effetto della flessione; per esempio per travi a mensola snelle l'effetto del taglio è inferiore all'1% dell'effetto della flessione. Questo permette di utilizzare le formule ricavate senza commettere errori.

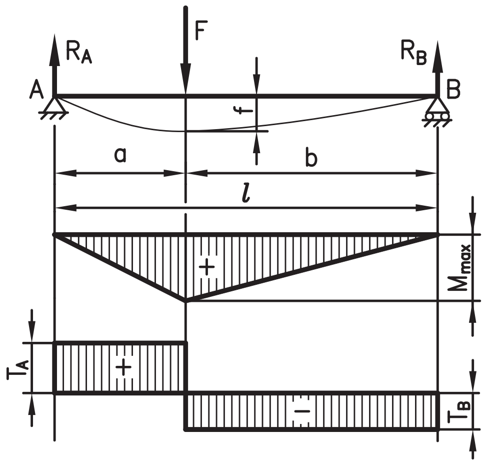
Quadro sinottico delle formule per il calcolo delle frecce e degli angoli di rotazione

Condizione di carico	Freccia (f)	Angolo (α)
	$f = \frac{M_f \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$	$\alpha = \frac{M_f \cdot l}{E \cdot I}$
	$f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$	$\alpha = \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$
	$f = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I}$	$\alpha = \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}$
	$f = \frac{M_f \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I}$	$\alpha = \frac{M_f \cdot l}{2 \cdot E \cdot I}$
	$f = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$	$\alpha = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I}$
	$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$	$\alpha = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$

Travi variamente vincolate e sottoposte ai tipi di carichi più comuni

<table>
<tr><th>Schema</th><th>Relazioni</th></tr>
<tr><td>

- Trave appoggiata agli estremi con carico concentrato



</td><td>

$$R_A = \frac{b}{l} \cdot F; \quad R_B = \frac{a}{l} \cdot F$$

$$T_A = R_A; \quad T_B = -R_B$$

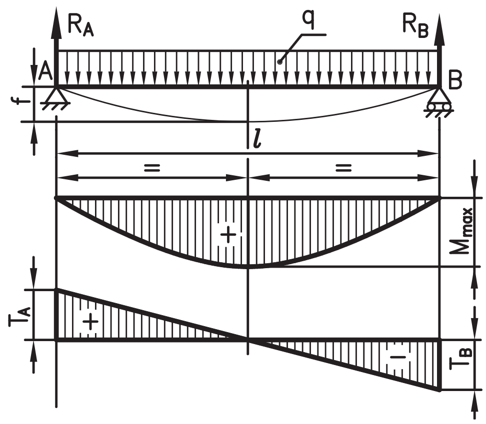
$$M_A = M_B = 0$$

$$M_{max} = R_A \cdot a = R_B \cdot b = \frac{a \cdot b}{l} \cdot F$$

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{E \cdot I \cdot l}$$

</td></tr>
<tr><td>

- Trave appoggiata agli estremi con carico uniformemente distribuito



</td><td>

$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$T_A = R_A; \quad T_B = -R_B$$

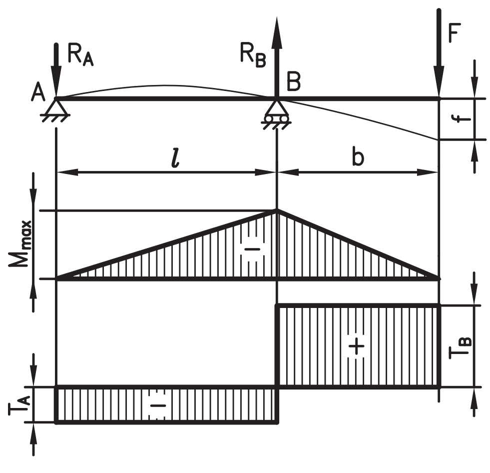
$$M_A = M_B = 0$$

$$M_{max} = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$$

$$f = \frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$$

</td></tr>
<tr><td>

- Trave con un appoggio intermedio e con carico concentrato all’estremo del tratto a sbalzo



</td><td>

$$R_A = \frac{b}{l} \cdot F; \quad R_B = \frac{l + a}{l} \cdot F$$

$$T_A = -\frac{b}{l} \cdot F; \quad T_B = F$$

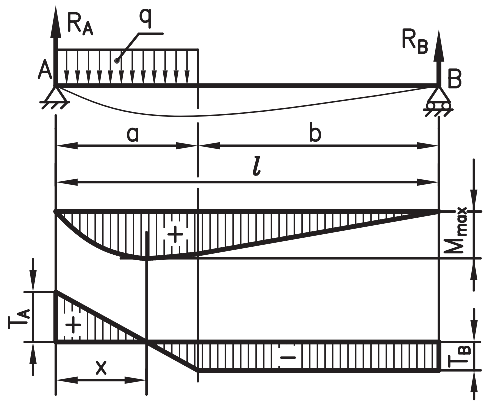
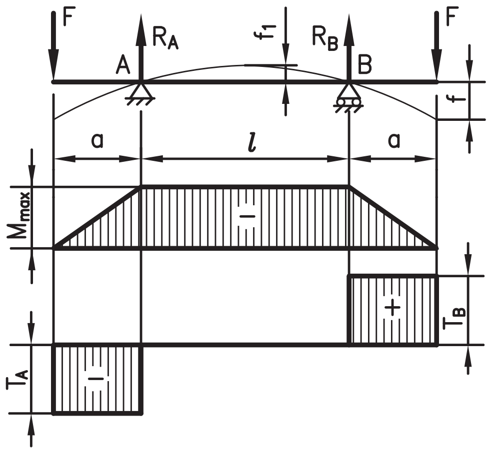
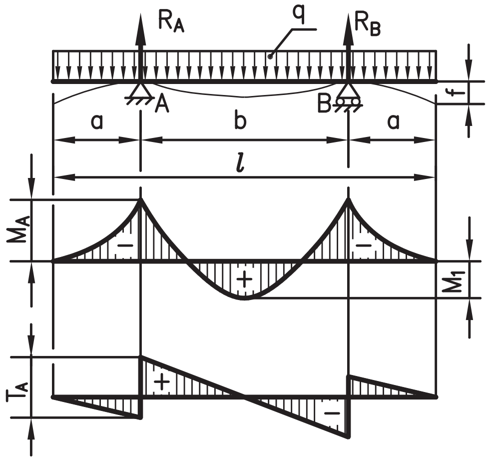
$$M_A = 0$$

$$M_{max} = -F \cdot b$$

$$f = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{(l + b) \cdot b^2}{3}$$

</td></tr>
</table>

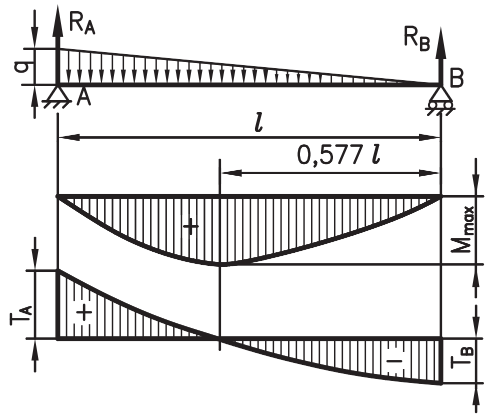
Continua

Schema	*Relazioni*
Trave appoggiata agli estremi con carico uniformemente distribuito su un tratto 	$R_A = q \cdot a \cdot \frac{a+2b}{2l}$; $R_B = q \cdot \frac{a^2}{2l}$ $T_A = R_A$; $T_B = -R_B$ $M_A = M_B = 0$ $M_{max} = \frac{R_A^2}{q}$ $x = \frac{R_A}{q}$
- Trave simmetrica con appoggi intermedi e carichi concentrati agli estremi 	$R_A = R_B = F$ $T_A = -R_A$; $T_B = R_B$ $M_{max} = -F \cdot a$ $f_1 = \frac{F \cdot a \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I}$ $f = \frac{F \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \left(a + \frac{3l}{2}\right)$
- Trave simmetrica con appoggi intermedi e carico uniformemente distribuito 	$R_A = R_B = \frac{q \cdot l^2}{2}$ $T_A = \lvert R_A \rvert$; $T_B = \lvert R_B \rvert$ $M_A = \frac{-q \cdot a}{2}$ $M_1 = \frac{q \cdot l^2}{4} \cdot \left(\frac{b}{l} - \frac{1}{2}\right)$ $f = \frac{q \cdot a}{24 \cdot E \cdot I} \cdot (3a^2 - b^3 + 6a^2 \cdot b)$

Continua

<table>
<tr><th>Schema</th><th>Relazioni</th></tr>
<tr><td>

- Trave appoggiata agli estremi con carico distribuito variabile con legge lineare (triangolare)



</td><td>

$$R_A = \frac{q \cdot l}{3} \quad ; \quad R_B = \frac{q \cdot l}{6}$$

$$T_A = R_A; \quad T_B = -R_B$$

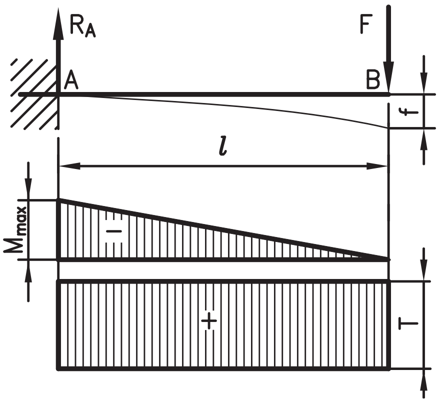
$$M_A = M_B = 0$$

$$M_{max} = \frac{16}{250} \cdot q \cdot l^2$$

$$f_{max} = 0,013 \cdot \frac{q \cdot l^4}{2E \cdot I}$$

</td></tr>
<tr><td>

- Trave incastrata a un estremo con carico concentrato all'estremo libero



</td><td>

$$R_A = F$$

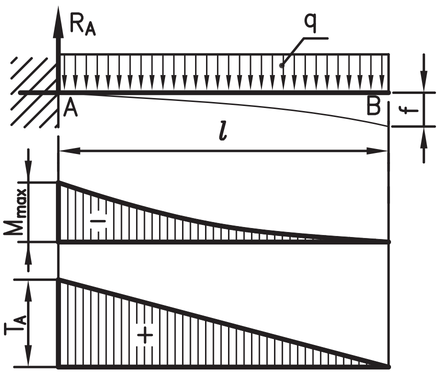
$$T = T_A = T_B = R_A$$

$$M_{max} = M_A = -F \cdot l$$

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I}$$

</td></tr>
<tr><td>

- Trave incastrata a un estremo con carico uniformemente distribuito



</td><td>

$$R_A = q \cdot l$$

$$T_A = R_A$$

$$M_{max} = M_A = -\frac{q \cdot l^2}{2}$$

$$f = \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$$

</td></tr>
</table>